Teoria grafurilor

Probleme propuse

Grafuri complete · Grafuri bipartite · Cuplaje · Arbori · Parcurgeri · Drumuri minime

Cuprins

1 Grafuri complete și grafuri bipartite 2

1.1 Grafuri complete, turnee, trasee euleriene și hamiltoniene 2

1.2 Grafuri bipartite și cuplaje . . 4

2 Arbori, parcurgeri și drumuri minime 8

2.1 Arbori și codul Prüfer 8

2.2 Arbori parțiali de cost minim . 9

2.3 Parcurgerea în lățime 10

2.4 Parcurgerea în adâncime 12

2.5 Punți, puncte de articulație și orientări 14

2.6 Drumuri minime 14

2.7 Metoda drumului critic 16

CAPITOLUL 1

Grafuri complete și grafuri bipartite

1.1 Grafuri complete, turnee, trasee euleriene și hamiltoniene

Problema 1. Un campionat cu 10 echipe

La un campionat de handbal participă 10 echipe, numerotate $1, \ldots, 10$. Fiecare echipă joacă exact o dată cu fiecare dintre celelalte.

a) Câte meciuri au loc în total?

b) Organizați meciurile în etape, astfel încât în fiecare etapă fiecare echipă să joace exact un meci. Câte etape sunt necesare? Scrieți programul complet.

c) Câte etape sunt necesare dacă participă doar 9 echipe? Cum se obține programul?

Problema 2. Clasamentul unei competiții de tenis

Cinci jucători, $A, \ldots, E$, au jucat fiecare cu fiecare câte un meci (fără egaluri). Rezultatele sunt:

Jucător	L-a învins pe	Jucător	L-a învins pe
A	$B,\ C,\ D$	D	$B,\ E$
B	$C,\ E$	E	A
C	$D,\ E$		

a) Arătați că jucătorii nu pot fi ordonați astfel încât fiecare să-i fi învins pe toți cei aflați după el.

b) Găsiți o ordonare în care fiecare jucător l-a învins pe *următorul*.

c) Arătați că jucătorul cu cele mai multe victorii este un „rege”: pentru orice alt jucător X, el l-a învins pe X sau a învins pe cineva care l-a învins pe X.

Problema 3. O rețea de senzori legați direct

Într-o fabrică, senzorii trebuie legați direct, fiecare cu fiecare, prin cabluri.

a) Se pot instala cel mult 70 de cabluri. Câți senzori pot fi legați în acest mod?

b) Pentru numărul de senzori găsit la a), câte cabluri se pot defecta simultan, oricare ar fi ele, fără ca rețeaua să devină neconexă?

c) Comparați cu o rețea inel (ciclu) și cu o rețea arbore cu același număr de senzori.

Problema 4. Zboruri operate de două companii

Între oricare două dintre 6 orașe există un zbor direct, operat fie de compania Alfa, fie de compania Beta.

a) Arătați că există 3 orașe între care toate cele trei zboruri sunt operate de aceeași companie.

b) Arătați că pentru 5 orașe afirmația nu mai este adevărată.

c) Orașele sunt numerotate $1, \ldots, 6$, iar Alfa operează exact zborurile 1–2, 2–3, 3–4, 4–5, 5–6, 6–1. Găsiți trei orașe ca la a).

Problema 5. Turul unui inspector

Un inspector pleacă din orașul A, vizitează orașele B, C, D, E câte o dată și revine în A. Distanțele (km) sunt:

	A	B	C	D	E
A	–	17	5	7	9
B	17	–	13	6	19
C	5	13	–	12	8
D	7	6	12	–	16
E	9	19	8	16	–

a) Câte trasee distincte există (un traseu și inversul lui se consideră identice)?

b) Găsiți traseul cel mai scurt.

c) Aplicați euristica „cel mai apropiat vecin” pornind din A. Dă ea traseul optim?

Problema 6. Cinci prieteni la masă rotundă

Cinci prieteni, $A, \ldots, E$, iau cina la o masă rotundă, două seri la rând.

a) Organizați locurile astfel încât oricare doi prieteni să stea alături exact o dată.

b) Arătați că pentru 6 prieteni o astfel de organizare nu este posibilă, oricâte seri ar trece.

Problema 7. Un set mic de domino

Un set de domino conține câte o piesă pentru fiecare pereche de numere de la 0 la 4, inclusiv dublurile 0–0, …, 4–4. Două piese alăturate trebuie să aibă același număr pe capetele care se ating.

a) Câte piese are setul? Modelați problema printr-un graf.

b) Arătați că toate piesele pot fi așezate într-un cerc și construiți o astfel de așezare.

c) Pentru setul cu numerele de la 0 la 5 (21 de piese), se pot așeza toate piesele într-un cerc? Dar într-un șir? Care este numărul minim de piese care trebuie scoase pentru ca restul să poată fi așezate într-un șir?

Problema 8. Cinci orașe și autostrăzi fără intersecții

Cinci orașe trebuie legate prin autostrăzi, fiecare oraș cu fiecare, fără ca două autostrăzi să se intersecteze (fără pasaje).

a) Este posibil?

b) Arătați că este posibil dacă renunțăm la o singură autostradă. Desenați rețeaua.

Problema 9. O horă alternantă

Patru băieți și patru fete se prind într-o horă, astfel încât băieții și fetele să alterneze.

a) În câte moduri distincte se pot așeza, dacă două așezări care diferă printr-o rotație sau printr-o oglindire se consideră identice?

b) Câte așezări există dacă se consideră identice doar cele care diferă printr-o rotație?

c) Se pot prinde alternant 4 băieți și 5 fete? Justificați cu ajutorul grafurilor.

Problema 10. Un grup fără trei cunoștințe reciproce

Într-un grup de 12 persoane nu există trei persoane care să se cunoască două câte două.

a) Câte perechi de cunoștințe pot exista cel mult? Dați un exemplu în care se atinge acest număr.

b) Arătați că dacă într-un grup de 12 persoane există 37 de perechi de cunoștințe, atunci există trei persoane care se cunosc două câte două.

Problema 11. Câte cunoștințe are fiecare?

a) Pot 7 persoane să cunoască fiecare exact 3 dintre celelalte?

b) Pot 7 persoane să aibă, respectiv, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2 cunoștințe în grup? Dacă da, dați un exemplu.

c) Arătați că în orice grup de cel puțin două persoane există două persoane cu același număr de cunoștințe în grup.

1.2 Grafuri bipartite și cuplaje

Problema 12. Studenți în două camere

Șapte studenți, numerotați $1, \ldots, 7$, trebuie cazați în două camere. Perechile de studenți care nu se înțeleg și nu pot sta în aceeași cameră sunt

$$12,\ 14,\ 23,\ 25,\ 36,\ 47,\ 56,\ 67.$$

a) Se pot împărți studenții în cele două camere? Dacă da, precizați împărțirea.

b) Ce se întâmplă dacă nici studenții 3 și 5 nu se înțeleg?

Problema 13. O rețea arbore în două clase

O rețea de distribuție are nodurile $1, \ldots, 10$ și legăturile

$$1\text{–}2, \quad 1\text{–}3, \quad 2\text{–}4, \quad 2\text{–}5, \quad 3\text{–}6, \quad 5\text{–}7, \quad 5\text{–}8, \quad 6\text{–}9, \quad 6\text{–}10.$$

a) Împărțiți nodurile în două clase astfel încât orice legătură să unească noduri din clase diferite.

b) Arătați că această împărțire este unică (în afara schimbării numelor claselor).

c) Se adaugă legătura 4–5. Mai există o astfel de împărțire? Dar dacă se adaugă, în schimb, legătura 4–7?

Problema 14. Traducători și limbi

O agenție are cinci traducători, $T_1, \ldots, T_5$, și cinci documente, scrise în limbile $L_1, \ldots, L_5$. Fiecare traducător trebuie să traducă un singur document, iar fiecare document trebuie tradus de un singur traducător. Limbile cunoscute de fiecare traducător sunt:

Traducător	Limbi	Traducător	Limbi
T_1	$L_1,\ L_3$	T_4	$L_2,\ L_4,\ L_5$
T_2	L_1	T_5	$L_2,\ L_5$
T_3	$L_1,\ L_3$		

a) Pot fi traduse toate documentele?

b) Câte documente pot fi traduse cel mult? Justificați că nu se poate mai mult.

c) Ce limbă nouă ar trebui să învețe unul dintre traducători pentru ca toate documentele să poată fi traduse?

Problema 15. Teme de prezentare

Șase studenți, $S_1, \ldots, S_6$, aleg dintre șase teme, $T_1, \ldots, T_6$. Fiecare student indică exact 3 teme, iar fiecare temă este indicată de exact 3 studenți:

Student	Teme	Student	Teme	Student	Teme
S_1	T_2, T_4, T_5	S_3	T_1, T_3, T_6	S_5	T_2, T_4, T_6
S_2	T_1, T_2, T_6	S_4	T_1, T_3, T_5	S_6	T_3, T_4, T_5

a) Arătați, fără a căuta efectiv repartizarea, că fiecare student poate primi o temă distinctă dintre cele indicate.

b) Determinați o astfel de repartizare.

c) Prezentările au loc în trei sesiuni. În fiecare sesiune fiecare student prezintă una dintre temele indicate, iar fiecare temă este prezentată o singură dată. Organizați cele trei sesiuni astfel încât fiecare student să prezinte toate cele trei teme alese.

Problema 16. Alocarea tehnicienilor (algoritmul ungar)

Patru tehnicieni, $C_1, \ldots, C_4$, trebuie trimiși la patru clienți, $Z_1, \ldots, Z_4$, câte unul la fiecare client. Timpii de deplasare (minute) sunt:

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
C_1	2	6	8	1
C_2	6	9	8	7
C_3	8	9	9	5
C_4	8	3	9	8

Determinați repartizarea care minimizează timpul total, folosind algoritmul ungar.

Problema 17. Trei mașini și trei lucrări

Trei lucrări trebuie executate pe trei mașini, câte o lucrare pe fiecare mașină. Costurile sunt date de matricea

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 8 & 2 & 7 \\ 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

(rândurile sunt lucrările, coloanele mașinile). Determinați repartizarea de cost minim folosind algoritmul ungar și verificați rezultatul cu marginea inferioară dată de algoritm.

Problema 18. Rezidențiat (cuplaje stabile)

Patru medici rezidenți, $S_1, \ldots, S_4$, trebuie repartizați la patru spitale, $F_1, \ldots, F_4$, câte unul la fiecare spital. Preferințele (de la cea mai dorită la cea mai puțin dorită) sunt:

Rezident	Preferințe	Spital	Preferințe
S_1	$F_4,\ F_2,\ F_1,\ F_3$	F_1	$S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$
S_2	$F_3,\ F_2,\ F_1,\ F_4$	F_2	$S_2,\ S_4,\ S_1,\ S_3$
S_3	$F_3,\ F_1,\ F_2,\ F_4$	F_3	$S_4,\ S_3,\ S_2,\ S_1$
S_4	$F_2,\ F_1,\ F_3,\ F_4$	F_4	$S_4,\ S_2,\ S_1,\ S_3$

a) Este stabilă repartizarea S_1F_1, S_2F_2, S_3F_3, S_4F_4?

b) Aplicați algoritmul Gale–Shapley în care rezidenții fac cererile.

c) Aplicați algoritmul în care spitalele fac cererile. Comparați cele două repartizări.

Problema 19. Orarul unui centru de meditații

Trei profesori predau la patru grupe numărul de ore săptămânale din tabel. Un profesor poate preda la o singură grupă într-o oră, iar o grupă are un singur profesor într-o oră.

	Gr1	Gr2	Gr3	Gr4
Prof1	2	1	0	1
Prof2	1	2	1	0
Prof3	0	1	2	1

Care este numărul minim de intervale orare necesare? Construiți un orar cu acest număr de intervale.

Problema 20. Un meci de șah între două echipe

Două echipe de șah, cu jucătorii $a_1, \ldots, a_4$, respectiv $b_1, \ldots, b_4$, joacă astfel încât fiecare jucător al primei echipe joacă exact o partidă cu fiecare jucător al celei de-a doua. Într-o rundă fiecare jucător joacă o singură partidă.

a) Care este numărul minim de runde?

b) În prima rundă se joacă partidele a_1b_3, a_2b_4, a_3b_1, a_4b_2. Arătați că programul poate fi completat și completați-l. Scrieți programul sub forma unui pătrat latin.

CAPITOLUL 2

Arbori, parcurgeri și drumuri minime

2.1 Arbori și codul Prüfer

Problema 21. Codificarea unei rețele de irigații

O rețea de irigații leagă 9 puncte, numerotate $1, \ldots, 9$, prin conductele

$$1\text{–}6, \quad 2\text{–}6, \quad 3\text{–}8, \quad 4\text{–}8, \quad 5\text{–}7, \quad 6\text{–}7, \quad 7\text{–}8, \quad 8\text{–}9.$$

a) Arătați că rețeaua este un arbore.

b) Determinați codul Prüfer al rețelei.

c) Verificați proprietatea gradelor pe codul obținut.

Problema 22. Reconstruirea unei rețele de telefonie

O rețea de antene în formă de arbore a fost transmisă prin codul Prüfer

$$(3,\ 3,\ 7,\ 1,\ 7,\ 2).$$

a) Câte antene are rețeaua și care este gradul fiecăreia?

b) Reconstruiți rețeaua.

c) Verificați rezultatul, recalculând codul.

Problema 23. Organigrama unei firme

Organigrama unei firme are 13 posturi, numerotate $1, \ldots, 13$. Legăturile de subordonare sunt date prin listele de vecini:

Vârf	Vecini	Vârf	Vecini	Vârf	Vecini	Vârf	Vecini
1	2, 3, 4	5	2	9	3	13	10
2	1, 5, 6	6	2	10	4, 13		
3	1, 7, 8, 9	7	3, 11, 12	11	7		
4	1, 10	8	3	12	7		

a) Desenați graful și verificați că este un arbore.

b) Determinați codul Prüfer corespunzător.

c) Verificați proprietatea gradelor pe codul obținut.

Problema 24. Arborele cu codul 5158133

Un arbore are codul Prüfer

$$(5,\ 1,\ 5,\ 8,\ 1,\ 3,\ 3).$$

a) Câte vârfuri are arborele și care este gradul fiecărui vârf?

b) Construiți și desenați arborele.

c) Verificați rezultatul, recalculând codul.

Problema 25. Câte rețele arbore între șase sate?

Șase sate, numerotate $1, \ldots, 6$, trebuie legate prin 5 drumuri astfel încât din orice sat să se poată ajunge în oricare altul (rețeaua este un arbore).

a) Câte astfel de rețele există?

b) În câte dintre ele satul 1 este capăt de rețea (are un singur drum)?

c) În câte dintre ele din satul 1 pleacă exact 3 drumuri?

d) Câte rețele au gradele $d(1) = 4$, $d(2) = 2$ și $d(3) = d(4) = d(5) = d(6) = 1$? Desenați-le.

Problema 26. Rețele stea și lanț cu șapte calculatoare

Șapte calculatoare, numerotate $1, \ldots, 7$, sunt legate printr-o rețea arbore.

a) Determinați codul Prüfer al rețelei stea în care calculatorul 4 este legat de toate celelalte.

b) Determinați codul Prüfer al rețelei lanț 6–2–7–1–4–3–5.

c) Câte rețele stea și câte rețele lanț se pot forma cu cele 7 calculatoare?

2.2 Arbori parțiali de cost minim

Problema 27. Rețeaua de apă a unei comune (algoritmul lui Kruskal)

Șapte sate, $A, \ldots, G$, trebuie legate la o rețea de apă, astfel încât apa să poată ajunge din orice sat în oricare altul. Traseele posibile și costurile lor (sute de mii de lei) sunt:

$$AB = 8,\quad AC = 5,\quad BC = 9,\quad BD = 4,\quad BE = 7,\quad CE = 6,$$
$$CF = 10,\quad DE = 15,\quad DG = 12,\quad EF = 3,\quad EG = 14,\quad FG = 13.$$

a) Aplicați algoritmul lui Kruskal, precizând componentele după fiecare pas.

b) Determinați rețeaua de cost minim și costul ei. Este ea unică?

Problema 28. Aceeași rețea: Prim și Dijkstra

Considerăm rețeaua din Problema 27.

a) Aplicați algoritmul lui Prim pornind din satul D, precizând etichetele după fiecare pas.

b) Comparați rezultatul și ordinea alegerii muchiilor cu cele obținute prin algoritmul lui Kruskal.

c) Determinați arborele drumurilor minime din D (algoritmul lui Dijkstra) și comparați-l cu arborele parțial de cost minim.

Problema 29. Algoritmul lui Prim pe o matrice de costuri

Costurile (mii de lei) pentru legarea directă a șase clădiri ale unui campus sunt date de matricea

	1	2	3	4	5	6
1	–	7	4	9	12	8
2	7	–	10	3	11	14
3	4	10	–	6	5	13
4	9	3	6	–	15	2
5	12	11	5	15	–	16
6	8	14	13	2	16	–

Aplicați algoritmul lui Prim pornind din clădirea 1, precizând etichetele după fiecare pas, și determinați rețeaua de cost minim.

2.3 Parcurgerea în lățime

Problema 30. Rețeaua de autobuze a unui oraș

Rețeaua de autobuze a unui oraș are 10 stații, $A, \ldots, J$. Legăturile directe între stații sunt

$$AB,\ AC,\ BD,\ BE,\ CE,\ CF,\ DG,\ EG,\ EH,\ FH,\ GI,\ HJ,\ IJ.$$

a) Aplicați parcurgerea în lățime pornind din stația A (vecinii în ordine alfabetică), precizând conținutul cozii la fiecare pas.

b) Determinați, pentru fiecare stație, numărul minim de legături de la A și un traseu cu acest număr de legături până la stația J.

c) Desenați arborele BFS.

Problema 31. Două echipe de lucru

Opt muncitori, numerotați $1, \ldots, 8$, trebuie împărțiți în două echipe. Perechile care nu pot lucra în aceeași echipă sunt

$$12,\ 14,\ 23,\ 36,\ 45,\ 58,\ 67,\ 78.$$

a) Aplicați BFS din vârful 1 și determinați nivelurile.

b) Folosind nivelurile, decideți dacă împărțirea este posibilă și precizați echipele.

c) Ce se întâmplă dacă nici muncitorii 3 și 5 nu pot lucra împreună? Găsiți un ciclu impar.

Problema 32. Vasele de 3 și 7 litri

Avem un vas A de 3 litri și un vas B de 7 litri, ambele goale, fără gradații, și o sursă de apă. O operație constă în: umplerea unui vas, golirea unui vas sau turnarea apei dintr-un vas în celălalt, până când primul se golește sau al doilea se umple.

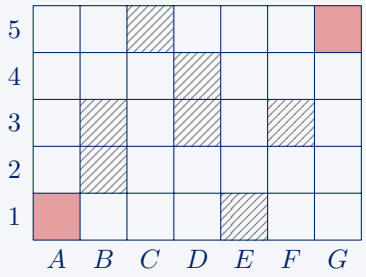
a) Modelați problema printr-un graf și aplicați BFS din starea inițială.

b) Care este numărul minim de operații prin care se obțin exact 2 litri într-un vas? Precizați operațiile.

c) Aceeași întrebare pentru 5 litri.

Problema 33. Răspândirea unei infestări într-o livadă

O livadă este împărțită în parcele pătrate, ca în figură (coloanele $A, \ldots, G$, rândurile $1, \ldots, 5$). Parcelele hașurate sunt drumuri și clădiri, fără pomi. La momentul 0 dăunătorii apar simultan în parcelele $A1$ și $G5$ (colorate). În fiecare săptămână, ei trec din fiecare parcelă infestată în parcelele vecine (sus, jos, stânga, dreapta) care au pomi.



a) Modelați problema printr-un graf și precizați ce parcurgere determină momentul infestării fiecărei parcele.

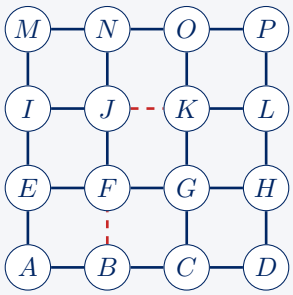
b) Determinați săptămâna în care este infestată fiecare parcelă.

c) După câte săptămâni este infestată întreaga livadă? Care parcele sunt infestate ultimele?

d) Cât ar dura dacă dăunătorii ar apărea doar în $A1$?

Problema 34. Trasee cele mai scurte într-un cartier

Străzile unui cartier formează un caroiaj cu 16 intersecții, notate ca în figură. Toate tronsoanele au aceeași lungime. Tronsoanele B–F și J–K sunt închise (punctate în figură). Un poștaș pleacă din A spre P.



a) Aplicați BFS din A și determinați distanța de la A la fiecare intersecție.

b) Câte trasee de lungime minimă există de la A la P?

c) Câte dintre aceste trasee trec prin intersecția G?

Problema 35. Calul pe o tablă 5×5

Un cal de șah se află în colțul $a1$ al unei table 5×5 (coloanele $a, \ldots, e$, rândurile $1, \ldots, 5$).

a) Modelați mutările calului printr-un graf și determinați, cu BFS, numărul minim de mutări până la fiecare pătrat.

b) Care este numărul minim de mutări până în colțul opus $e5$? Dați un drum optim.

c) Care pătrate sunt cele mai greu de atins? Este surprinzător că printre ele se află pătratul vecin pe diagonală $b2$ și centrul $c3$?

Problema 36. Amplasarea unui depozit

O firmă are 11 magazine, legate prin drumuri care formează un arbore:

$$1\text{–}2,\quad 2\text{–}3,\quad 3\text{–}4,\quad 4\text{–}5,\quad 3\text{–}6,\quad 6\text{–}7,\quad 7\text{–}8,\quad 2\text{–}9,\quad 9\text{–}10,\quad 6\text{–}11.$$

Toate drumurile au aceeași lungime. Depozitul trebuie amplasat lângă un magazin astfel încât distanța maximă până la celelalte magazine (excentricitatea) să fie minimă.

a) Calculați, cu BFS, excentricitatea fiecărui vârf.

b) Determinați centrul arborelui. Verificați rezultatul eliminând succesiv frunzele.

c) Care sunt raza și diametrul arborelui?

2.4 Parcurgerea în adâncime

Problema 37. Vizitarea unui muzeu cu DFS

Un muzeu are 8 săli, numerotate $1, \ldots, 8$, legate prin ușile

$$12,\ 14,\ 23,\ 25,\ 36,\ 47,\ 58,\ 67,\ 78.$$

Un vizitator pleacă din sala 1 și aplică parcurgerea în adâncime, alegând mereu ușa spre sala nevizitată cu numărul cel mai mic și întorcându-se când nu mai are săli noi accesibile.

a) Determinați ordinea vizitării sălilor și momentele t_{in}, t_{out}.

b) Determinați arborele DFS și muchiile de întoarcere.

c) Indicați câte un ciclu pentru fiecare muchie de întoarcere.

Problema 38. Realizarea unui site web (sortare topologică)

Realizarea unui site web cuprinde activitățile de mai jos. Un arc $X \to Y$ înseamnă că X trebuie terminată înainte de începerea lui Y.

AN	analiza cerințelor	IN	programarea interfeței	DO	documentația
PR	proiectarea interfeței	SV	programarea serverului	HO	contractarea găzduirii
BD	proiectarea bazei de date	TE	testarea	LA	lansarea

$$AN \to PR,\quad AN \to BD,\quad PR \to IN,\quad PR \to SV,\quad BD \to SV,\quad IN \to TE,$$
$$IN \to DO,\quad SV \to TE,\quad TE \to LA,\quad DO \to LA,\quad HO \to LA.$$

a) Aplicați DFS, lansând parcurgerea din activități în ordine alfabetică $(AN, BD, DO, HO, IN, LA, PR, SV, TE)$ și examinând succesorii tot alfabetic. Precizați momentele t_{in} și t_{out}.

b) Arătați că nu există dependențe circulare.

c) Determinați o ordine în care pot fi realizate activitățile.

Problema 39. Rețea împărțită în insule

Într-o rețea de 12 calculatoare funcționează doar legăturile

$$1\text{–}2,\quad 2\text{–}3,\quad 3\text{–}1,\quad 4\text{–}5,\quad 5\text{–}6,\quad 4\text{–}6,\quad 7\text{–}8,\quad 9\text{–}10,\quad 10\text{–}11,\quad 9\text{–}11.$$

a) Determinați, cu ajutorul parcurgerii în adâncime, componentele conexe.

b) Care este numărul minim de legături noi necesare pentru ca toate calculatoarele să poată comunica? Justificați.

Problema 40. Procese blocate

Într-un sistem rulează 6 procese $P_1, \ldots, P_6$. Un arc $P_i \to P_j$ înseamnă că P_i așteaptă terminarea lui P_j. Arcele sunt

$$P_1 \to P_2,\quad P_1 \to P_5,\quad P_2 \to P_3,\quad P_3 \to P_4,\quad P_5 \to P_4,\quad P_4 \to P_6,\quad P_6 \to P_2.$$

a) Aplicați DFS din P_1 și arătați că sistemul este blocat. Care procese sunt implicate?

b) Arcul $P_6 \to P_2$ este eliminat. Arătați că blocajul a dispărut și determinați o ordine în care se pot termina procesele.

2.5 Punți, puncte de articulație și orientări

Problema 41. Linii critice într-o rețea de fibră optică

O rețea de fibră optică are 11 noduri, legate prin liniile

$$1\text{–}2,\quad 2\text{–}3,\quad 3\text{–}1,\quad 3\text{–}4,\quad 4\text{–}5,\quad 5\text{–}6,\quad 6\text{–}4,$$
$$6\text{–}7,\quad 7\text{–}8,\quad 8\text{–}9,\quad 9\text{–}7,\quad 9\text{–}10,\quad 10\text{–}11.$$

a) Aplicați DFS din nodul 1 și calculați valorile t_{in} și low.

b) Determinați punțile și punctele de articulație.

c) Ce linie nouă ar elimina toate punctele critice?

Problema 42. Podurile unui arhipelag

Opt insule, numerotate $1, \ldots, 8$, sunt legate prin podurile

$$1\text{–}2,\quad 2\text{–}3,\quad 3\text{–}4,\quad 4\text{–}2,\quad 1\text{–}5,\quad 5\text{–}6,\quad 6\text{–}1,\quad 4\text{–}7,\quad 7\text{–}8.$$

a) Aplicați DFS din insula 1 (vecinii în ordine crescătoare) și calculați valorile t_{in} și low.

b) Care poduri sunt critice (prăbușirea lor ar izola o parte a arhipelagului)? Care insule sunt critice?

c) Ce pod nou ar elimina toate punctele critice?

Problema 43. Sens unic într-un centru istoric

Centrul istoric al unui oraș are 7 intersecții, legate prin străzile cu dublu sens

$$1\text{–}2,\quad 1\text{–}3,\quad 2\text{–}3,\quad 3\text{–}4,\quad 4\text{–}5,\quad 4\text{–}6,\quad 5\text{–}6,\quad 5\text{–}7,\quad 6\text{–}7.$$

Primăria vrea să transforme *toate* străzile în străzi cu sens unic, astfel încât din orice intersecție să se poată ajunge în oricare alta.

a) Arătați că, pentru rețeaua actuală, acest lucru este imposibil.

b) Se construiește strada nouă 2–5. Arătați, folosind DFS din intersecția 1, că acum există o orientare potrivită, și determinați-o.

2.6 Drumuri minime

Problema 44. Drumuri minime între sate (algoritmul lui Dijkstra)

Șapte sate, $A, \ldots, G$, sunt legate prin drumuri, cu lungimile (km):

$$AB = 3,\quad AC = 6,\quad BC = 2,\quad BD = 7,\quad CD = 3,\quad CE = 9,$$
$$DE = 4,\quad DF = 8,\quad EF = 1,\quad EG = 6,\quad FG = 2.$$

a) Aplicați algoritmul lui Dijkstra din satul A, precizând etichetele după fiecare pas.

b) Determinați distanța de la A la fiecare sat și un drum minim de la A la G.

c) Desenați arborele drumurilor minime.

Problema 45. Livrări pe străzi cu sens unic

Un curier pleacă din intersecția 1. Străzile cu sens unic dintre intersecțiile $1, \dots, 6$ și timpii de parcurgere (minute) sunt:

$$1 \to 2:\ 4,\quad 1 \to 3:\ 9,\quad 2 \to 3:\ 3,\quad 2 \to 4:\ 8,\quad 3 \to 4:\ 2,\quad 3 \to 5:\ 7,$$
$$4 \to 1:\ 5,\quad 4 \to 5:\ 6,\quad 4 \to 6:\ 9,\quad 5 \to 2:\ 4,\quad 5 \to 6:\ 1,\quad 6 \to 1:\ 7,\quad 6 \to 4:\ 2.$$

a) Aplicați algoritmul lui Dijkstra din intersecția 1 și determinați timpii minimi către toate intersecțiile.

b) Determinați traseul cel mai rapid de la 1 la 6.

c) Determinați traseul cel mai rapid de întoarcere, de la 6 la 1. Comparați.

Problema 46. Cel mai scurt drum: după ce criteriu?

a) În rețeaua din Problema 44, un camion vrea să ajungă de la A la G trecând prin cât mai puține sate intermediare. Ce traseu alege? Comparați cu drumul cel mai scurt în kilometri.

b) Pe o altă rută, de la S la A se poate merge direct (cost 4) sau prin B: $S \to B$ costă 5, iar pe porțiunea $B \to A$ șoferul primește un bonus de 3 (cost -3). Ce dă algoritmul lui Dijkstra din S? Este corect?

Problema 47. Rute cu bonusuri (algoritmul Bellman–Ford)

O firmă de curierat circulă între centrele s, a, b, c, d. Costul fiecărei curse directe este dat mai jos. Pe unele curse firma primește un bonus mai mare decât cheltuielile, deci costul este negativ:

$$s \to a:\ 4,\quad s \to b:\ 3,\quad a \to b:\ -2,\quad a \to c:\ 7,$$
$$b \to c:\ 3,\quad b \to d:\ 8,\quad c \to d:\ -4,\quad d \to a:\ 5.$$

a) Aplicați algoritmul Bellman–Ford din s și determinați costurile minime către toate centrele.

b) Determinați traseul de cost minim de la s la d.

c) Arătați că algoritmul lui Dijkstra ar da un rezultat greșit.

Problema 48. Arbitraj între euro, dolar și liră

O casă de schimb afișează următoarele cursuri: câte unități din moneda de pe coloană se primesc pentru o unitate din moneda de pe linie.

	EUR	USD	GBP
EUR	–	1,10	0,85
USD	0,90	–	0,77
GBP	1,17	1,29	–

a) Modelați problema astfel încât un arbitraj (un șir de schimburi care se întoarce în moneda inițială cu mai mulți bani) să corespundă unui circuit negativ.

b) Folosind algoritmul Bellman–Ford din EUR, arătați că nu există arbitraj.

c) Cursul GBP→USD devine 1,33. Arătați că apare un arbitraj și descrieți-l.

2.7 Metoda drumului critic

Problema 49. Renovarea unei bucătării

Renovarea unei bucătării cuprinde activitățile de mai jos (durate în zile).

Cod	Activitatea	Precedată de	Durata
A	demontarea mobilierului vechi	–	2
B	instalațiile sanitare	A	4
C	instalațiile electrice	A	3
D	zugrăvirea	B, C	3
E	comanda și livrarea mobilierului	–	10
F	montarea gresiei	B	5
G	montarea mobilierului	D, E, F	2
H	curățenia finală	G	1

a) Construiți graful activităților.

b) Determinați durata minimă a renovării, momentele ES, EF, LS, LF și rezervele.

c) Care este drumul critic? Cu câte zile poate întârzia livrarea mobilierului fără ca renovarea să se prelungească?

Problema 50. Organizarea unui festival: întârzieri și accelerări

Organizarea unui festival are următoarele activități (durate în săptămâni):

Cod	Activitatea	Precedată de	Durata
A	planificarea generală	–	3
B	atragerea sponsorilor	A	6
C	contractarea artiștilor	A	8
D	campania de promovare	B	5
E	proiectarea scenei	C	4
F	vânzarea biletelor	C, D	6
G	montarea scenei	E	2
H	desfășurarea festivalului	F, G	1

a) Determinați durata minimă și drumul critic.

b) Montarea scenei întârzie 3 săptămâni. Se amână festivalul? Dar dacă întârzie 8 săptămâni?

c) Atragerea sponsorilor poate fi scurtată. Cu cât scade durata totală dacă B se scurtează cu 3 săptămâni? Dar cu 4?